

**Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной и
методической работе

_____ Е.А. Каменева

29.12.2022 г.

Кулевский А.В.

Функциональный анализ

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика,
ОП «Анализ данных»,
Профиль «Анализ данных и принятие решений в
экономике и финансах»

*Рекомендовано Ученым советом
Факультета информационных технологий и анализа больших данных
(протокол №27 от 15.12.2022г.)*

*Одобрено Советом учебно-научного
Департамента анализа данных и машинного обучения
(протокол №6 от 13.12.2022 г.)*

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Наименование дисциплины.....	2
2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине	2
3. Место дисциплины в структуре образовательных программ.....	3
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся	3
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий	4
5.1. Содержание дисциплины.....	4
5.2. Учебно – тематический план.....	9
5.3. Содержание семинаров, практических занятий	10
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.....	12
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы	12
6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	14
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.....	16
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	26
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	26
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	27
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем	30
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	30

1. Наименование дисциплины

«Функциональный анализ».

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

ОП «Анализ данных»			
ПКН-1	Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области математики и компьютерных наук, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям	1. Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленных научно-исследовательских задач	знать: основы математического моделирования с использованием функционального анализа; уметь: применять математический аппарат для формализации решаемых задач
		2. Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов	знать: методы функционального анализа и основные способы построения прикладных математических моделей; уметь: применять методы функционального анализа при решении финансово-экономических задач методом математического моделирования

3. Место дисциплины в структуре образовательных программ

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к Циклу математики и информатики по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, ОП «Анализ данных».

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к Общефилиальскому (предпрофильному) циклу по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, ОП «Анализ данных».

Изучение дисциплины «Функциональный анализ» базируется на знаниях, полученных в рамках курсов математического анализа, алгебры и геометрии, дифференциальных уравнений.

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

ОП «Анализ данных, Профиль «Анализ данных и принятие решений в экономике и

Вид учебной нагрузки по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 5 / 6 (в часах)
Общая трудоёмкость дисциплины	3/108	108
<i>Контактная работа - Аудиторные занятия</i>	<i>34</i>	<i>34</i>
<i>Лекции</i>	<i>16</i>	<i>16</i>
<i>Семинары, практические занятия</i>	<i>18</i>	<i>18</i>
<i>Самостоятельная работа</i>	<i>74</i>	<i>74</i>
Вид текущего контроля		Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации		зачет

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

Тема 1 – Множества, мера, измеримые функции, интеграл Лебега

Операции над множествами. Последовательность множеств. Предел монотонной последовательности множеств. Верхний и нижний пределы последовательности множеств. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Отношение порядка. Максимальные элементы. Линейно упорядоченное подмножество. Верхняя грань. Мощность множества. Теорема о существовании инъекции. Линейный порядок на классе всех множеств, определяемый существованием инъекции. Теорема Кантора-Бернштейна о существовании биекции. Эквивалентность на классе всех множеств, определяемая существованием биекции. Теорема Кантора о мощности булеана. Континуум-гипотеза. Счетное множество, континуум, гиперконтинуум. Мощность счетного объединения счетных множеств. Мощность конечного и счетного произведения счетных множеств. Мощность счетного произведения континуумов. Мощности множеств целочисленных последовательностей, непрерывных числовых функций, всех числовых функций.

Мера. Пространство с мерой. Формула включения-исключения. Монотонность меры. Неравенства для меры. Конечная аддитивность, счетная полуаддитивность,

счетная аддитивность. Непрерывность счетно-аддитивной меры. Мера верхнего и нижнего предела последовательности множеств. Неравенство для предела меры последовательности множеств. Мера Жордана. Элементарное по Жордану множество, его мера. Множества, измеримые по Жордану. Множества жордановой меры нуль. Конечная аддитивность меры Жордана. Пример множества, неизмеримого по Жордану. Мера Лебега. Элементарное по Лебегу множество, его мера. Множества, измеримые по Лебегу. Множества лебеговой меры нуль. Счетная аддитивность меры Лебега. Пример множества, неизмеримого по Лебегу. Канторово множество.

Измеримые на конечном отрезке функции. Измеримость характеристической функции измеримого множества. Композиция непрерывной и измеримой функции. Понятие «почти всюду». Предел последовательности измеримых функций. Равномерная, поточечная сходимости и сходимость по мере. Интеграл от простой функции, интеграл от неотрицательной функции. Линейность, монотонность, конечная аддитивность, отсутствие счетной аддитивности интеграла. Теорема Леви о монотонной сходимости. Абсолютная непрерывность интеграла. Обобщенная производная. Теорема Лебега об ограниченной сходимости. Интегрируемость функции равносильна интегрируемости ее модуля. Интеграл от произвольной функции как предел интегралов от равномерно сходящейся последовательности простых функций. Сравнение интегрируемости по Риману и по Лебегу. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. Несобственный интеграл Римана и интеграл Лебега. Вычисление интеграла Лебега сведением к интегралу Римана.

Тема 2 – Метрические пространства

Метрика. Конструкции метрик. Примеры метрических пространств: пространство подмножеств прямой (метрика Хаусдорфа), конечномерное линейное пространство, пространства числовых последовательностей (их включения), пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, пространства интегрируемых функций (их включения). Конечномерная, бесконечномерная, интегральная формы неравенств Коши-Буняковского, Гельдера, Минковского.

Неравенство многоугольника. Шар. Ограниченность множества. Предел последовательности точек. Внутренние, предельные, граничные, изолированные

точки множества. Открытые и замкнутые множества. Объединения и пересечения
 открытых и замкнутых множеств. Общий вид открытого множества на прямой.
 Замыкание. Замкнутый шар и замыкание шара. Примеры замыканий: пространство
 последовательностей как замыкание пространства финитных последовательностей,
 пространство непрерывных функций как замыкание подпространства многочленов
 (многочлены Бернштейна). Плотное и нигде не плотное подмножества. Примеры
 сепарабельных и несепабельных пространств. Фундаментальная и сходящаяся
 последовательности. Полное пространство. Полнота подпространства полного
 пространства. Примеры полных пространств. Теорема о стягивающейся системе
 замкнутых шаров. Пополнение, примеры: пространство действительных чисел как
 пополнение пространства рациональных чисел, пространство интегрируемых по
 Лебегу функций как пополнение пространства
 непрерывных функций по интегральной метрике. Компактность
 множества и компактность пространства. Ограниченность и
 замкнутость компактного множества, компактность
 в конечномерном пространстве. Критерий Хаусдорфа компактности
 метрического пространства. Примеры компактных множеств
 и пространств. Непрерывные отображения.
 Эквивалентные определения непрерывности отображения.
 Непрерывность метрики. Сжимающие
 отображения. Сжимающее линейное отображение в конечномерном
 пространстве. Теорема Банаха о неподвижной точке, примеры применения: теорема о
 неявной функции, теорема о существовании и единственности решения ОДУ I-го
 порядка. Вычислительные приложения теоремы Банаха: метод Ньютона
 приближенного решения системы уравнений. Теорема о неподвижной точке
 в компактном пространстве. Теорема
 Вейерштрасса (метрический вариант) о существовании и свойствах решений задачи
 оптимизации.

Тема 3 – Нормированные пространства

Линейное пространство. Подпространство. Фактор-пространство. Линейная

независимость множества векторов. Бесконечномерные пространства. Базис Гамеля, теоремы о существовании и мощности. Линейная размерность пространства. Норма. Метрика, порождаемая нормой. Банахово пространство, примеры. Замыкание подпространства есть подпространство. Преднорма. Подпространство векторов, на котором преднорма равна нулю. Преднорма как норма в фактор-пространстве. Введение нормы в пространствах интегрируемых функций. Непрерывность нормы. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Примеры неэквивалентных норм в бесконечномерных пространствах. Сходимость ряда в банаховом пространстве. Признак абсолютной сходимости. Полная система векторов. Базис Шаудера, примеры. Пример полной системы векторов, не являющейся базисом.

Тема 4 – Евклидовы пространства

Скалярное произведение. Норма, порождаемая скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертово пространство, примеры. Тождество параллелограмма как критерий порождаемости нормы скалярным произведением. Примеры норм, не порождаемых скалярным произведением. Угол между векторами. Ортогональность. Ортогонализация системы векторов. Пример ортогонализации: многочлены в пространстве квадратично интегрируемых функций. Непрерывность скалярного произведения. Ортогональное дополнение. Ортонормированная система векторов. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Полнота ортонормированной системы в сепарабельном пространстве. Ортонормированный базис, примеры.

Тема 5 – Линейные операторы и функционалы

Линейный ограниченный оператор (функционал) в нормированных пространствах. Равносильность непрерывности и ограниченности. Пример неограниченного линейного оператора. Норма линейного оператора (функционала). Норма оператора в конечномерном случае: матричные нормы. Вычисление нормы. Продолжение линейного оператора (функционала) по непрерывности. Теорема Хана-Банаха о продолжении ограниченного линейного функционала, заданного на подпространстве. Существование ненулевого ограниченного линейного функционала. Сопряженное пространство, примеры. Неравенства Юнга и Гельдера. Полнота сопряженного

пространства. Теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве. Обратное отображение. Линейность отображения, обратного к линейному. Открытое отображение. Линейный оператор как открытое отображение. Теорема Банаха об обратном операторе. Примеры обратных операторов. Сопряженный оператор в гильбертовых пространствах, его норма.

Тема 6 – Свойства функционалов

Свойства функционалов в точке и на множестве в гильбертовом пространстве: непрерывность, полунепрерывность (снизу и сверху), выпуклость. Слабая и сильная сходимость последовательности, их взаимосвязь. Пример слабо, но не сильно сходящейся последовательности. Слабая непрерывность (слабая полунепрерывность), их связь с непрерывностью (полунепрерывностью). Теорема о выпуклом, полунепрерывном снизу функционале. Полунепрерывность (слабая полунепрерывность) снизу суммы полунепрерывных (слабо полунепрерывных) снизу функционалов. Примеры линейного, квадратичных функционалов.

Тема 7 – Свойства множеств

Понятия слабой замкнутости и слабой компактности множества в гильбертовом пространстве. Замкнутость слабо замкнутого множества. Сфера замкнута, но не слабо замкнута. Слабая компактность компактного множества. Шар слабо компактен, но не компактен. Слабая замкнутость и ограниченность слабо компактного множества. Понятия предкомпактности, слабой предкомпактности (ее эквивалентность ограниченности). Теорема Мазура, следствия: теорема о выпуклом, замкнутом множестве; теорема о выпуклом, замкнутом, ограниченном множестве в гильбертовом пространстве. Замкнутое подмножество компакта компактно, слабо замкнутое подмножество слабого компакта слабо компактно. Классические примеры: шар, сфера, гиперплоскость, полупространство, эллипсоид, «Гильбертов кирпич». Пересечение выпуклых множеств, пересечение замкнутых множеств. Примеры критериев компактности. Теорема Вейерштрасса (слабый вариант) о существовании и свойствах решений задачи оптимизации.

Тема 8 – Дифференцирование

Определение дифференцируемости и (первой) производной Фреше для

отображения, действующего в нормированных пространствах. Производная Фреше для функционала в гильбертовом пространстве. Непрерывность, отсутствие слабой непрерывности, линейность, однозначность задания производной. Теорема о производной сложного отображения. Определение второй производной Фреше для отображения в нормированных пространствах и для функционала в гильбертовом пространстве. Непрерывность второй производной, формула Тейлора. Примеры линейного, квадратичных функционалов, степенной функции. Необходимые и достаточные условия локального экстремума для функционала, один либо два раза дифференцируемого по Фреше.

Тема 9 – Критерии выпуклости, сильной выпуклости

Строгая выпуклость, сильная выпуклость с константой сильной выпуклости. Сильная выпуклость неотрицательной линейной комбинации сильно выпуклых функционалов. Критерии выпуклости, сильной выпуклости для функционалов, один либо два раза непрерывно дифференцируемых по Фреше. Примеры линейного, квадратичных функционалов, степенной функции. Теорема Вейерштрасса (сильно выпуклый вариант) о существовании и свойствах решений задачи оптимизации.

Тема 10 – Метрическая проекция

Метрическая проекция на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Существование и единственность проекции, нестрогая сжимаемость оператора проектирования, характеристическое свойство проекции. Примеры проектирования на гиперплоскость, полупространство, слой, шар. Формула проектирования на замкнутое подпространство. Теорема о проектировании на пересечение типовых множеств.

Тема 11 – Критерии оптимальности в задачах оптимизации

Необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче минимизации дифференцируемого функционала на выпуклом множестве. Пример решения задачи оптимального управления. Проекционная форма необходимых и достаточных условий оптимальности, пример решения задачи минимизации.

5.2. Учебно–тематический план

№ п/п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоемкость в часах					Формы текущего контроля успеваемости
		Всего	Контактная работа - Аудиторная работа			Самост оатель ная работа	
			Общая, в т.ч.:	Лекции	Семинары, практические занятия		
1.	Множества, мера, измеримые функции, интеграл Лебега	19	6	3	3	13	Самостоятельные работы. Решение задач на практических занятиях. Обсуждение домашних заданий.
2.	Метрические пространства	6	2	1	1	4	
3.	Нормированные пространства	6	2	1	1	4	
4.	Евклидовы пространства	6	2	1	1	4	
5.	Линейные операторы и функционалы	12	3	1	2	9	Самостоятельные работы. Решение задач на практических занятиях. Обсуждение домашних заданий.
6.	Свойства функционалов	13	4	2	2	9	
7.	Свойства множеств	13	4	2	2	9	
8.	Дифференцирование	13	5	2	3	8	
9.	Критерии выпуклости, сильной выпуклости	7	2	1	1	5	
10.	Метрическая проекция	6	2	1	1	4	
11.	Критерии оптимальности в задачах оптимизации	7	2	1	1	5	Согласно учебному плану: контрольная работа
	В целом по дисциплине	108	34	16	18	74	
	Итого в %		31	47	53	69	

5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарских, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8, 9 (указывается раздел и порядковый номер источника)	Формы проведения занятий
Множества, мера, измеримые функции, интеграл Лебега	Операции над множествами. Мощность множества. Мера Жордана. Мера Лебега. Канторово множество. Измеримые функции. Интеграл Лебега. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Метрические пространства	Метрика. Конечномерная, бесконечномерная, интегральная формы неравенств Коши-Буняковского, Гельдера, Минковского. Теорема Банаха о неподвижной точке. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Нормированные пространства	Линейная независимость множества векторов. Введение нормы в пространствах интегрируемых функций. Непрерывность нормы. Банахово пространство, примеры. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Евклидовы пространства	Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертово пространство, примеры. Тождество параллелограмма. Непрерывность скалярного произведения. Примеры норм. Неравенство Бесселя. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Линейные операторы и функционалы	Линейный ограниченный оператор в нормированных пространствах. Равносильность непрерывности и ограниченности. Пример неограниченного оператора. Вычисление нормы. Теорема Банаха об обратном операторе, примеры. Сопряженный оператор, его норма. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Свойства функционалов	Непрерывность, полунепрерывность, выпуклость. Слабая и сильная сходимости последовательности, Слабая непрерывность, полунепрерывность, примеры. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов

Свойства множеств	Замкнутость, слабая замкнутость, компактность, слабая компактность, выпуклость, ограниченность в гильбертовом пространстве, примеры. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Дифференцирование	Первая, вторая производные Фреше, производная суперпозиции, примеры. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Критерии выпуклости, сильной выпуклости	Критерии выпуклости, сильной выпуклости для гладких, дважды гладких функционалов, примеры. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Метрическая проекция	Свойства проекции, примеры проектирования на типовые множества. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов
Критерии оптимальности в задачах оптимизации	Решение задач оптимального управления, выпуклых задач минимизации при помощи критериев оптимальности. <i>Рекомендуемые источники: 8.1-2, 9.1-4</i>	обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
--	--	--

Множества, мера, измеримые функции, интеграл Лебега	Мощность конечного и счетного произведения счетных множеств. Мощность счетного произведения континуумов. Мощности множеств целочисленных последовательностей, непрерывных числовых функций, всех числовых функций.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете.
Метрические пространства	Сжимающее линейное отображение в конечномерном пространстве. Вычислительные приложения теоремы Банаха: метод Ньютона приближенного решения системы уравнений. Теорема о неподвижной точке в компактном пространстве.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете.
Нормированные пространства	Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.
Евклидовы пространства	Пример ортогонализации: многочлены в пространстве квадратично интегрируемых функций.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.
Линейные операторы и функционалы	Открытое отображение. Линейный оператор как открытое отображение.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете.
Свойства функционалов	Полунепрерывность (слабая полунепрерывность) снизу суммы полунепрерывных (слабо полунепрерывных) снизу функционалов.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете.

Свойства множеств	Классические примеры: шар, сфера, гиперплоскость, полупространство, эллипсоид, «Гильбертов кирпич». Пересечение выпуклых множеств, пересечение замкнутых множеств. Примеры критериев компактности.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете.
Дифференцирование	Непрерывность второй производной, формула Тейлора. Необходимые и достаточные условия локального экстремума для функционала, один либо два раза дифференцируемого по Фреше.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете.
Критерии выпуклости, сильной выпуклости	Сильная выпуклость неотрицательной линейной комбинации сильно выпуклых функционалов.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете.
Метрическая проекция	Формула проектирования на замкнутое подпространство.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.
Критерии оптимальности в задачах оптимизации	Примеры решения задач минимизации.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.

6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерные задания самостоятельной работы

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №1

(измеримость, интегрируемость, метрика, норма, скалярное произведение, свойства функций)

1. Обосновать, является ли функция $f(t) = \begin{cases} 1, & t - \text{иррациональное} \\ -1, & t - \text{рациональное} \end{cases}$ измеримой, интегрируемой на отрезке $t \in [0, 1]$? Найти $\int_0^1 f(t)dt$ в смысле Лебега, если он существует.

2. Обоснуйте, является ли выражение $s(f, g) = \int_0^1 f(\frac{t}{2})g(\frac{t}{2})dt$ скалярным произведением в $L^2[0, 1]$?

3. Исследовать функционал $J(x)$ на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу, слабую непрерывность, слабую полунепрерывность снизу в пространстве l_2 , где

$$J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2x_n + x_{n+1})^2.$$

Примерные задания контрольной работы

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 (свойства множеств, теоремы Вейерштрасса, дифференцирование, проекция)

1. Исследовать множество X на выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую замкнутость, компактность и слабую компактность в пространстве l^2 , где

$$X = \left\{ x \in l^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x_{2n} \leq 2 \right\}.$$

2. Для функции $J(x)$ в пространстве l^2 выписать в явном виде первую и вторую производные по Фреше, где

$$J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n + x_{n+1} - \frac{1}{n} \right)^2.$$

3. Обоснуйте, применимы ли а) метрический, б) слабый, в) сильно выпуклый варианты теоремы Вейерштрасса в задаче минимизации $J(x) \rightarrow \inf_{x \in X}$, где множество X и функция $J(x)$ взяты из 1 и 2 пунктов.

4. В пространстве $L^2[0, 1]$ найти проекцию вектора $h(t) = -2 \cos \frac{\pi}{2} t$ на множество

$$U = \left\{ u \in L^2[0, 1] : \int_0^1 u^2(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях Департамента анализа данных и машинного обучения.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в п.2. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
ОП «Анализ данных»			
ПКН-1 Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области математики и компьютерных наук, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям	1. Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленных научно-исследовательских задач.	знать: основы математического моделирования с использованием функционального анализа; уметь: применять математический аппарат для формализации решаемых задач	Выяснить, является ли функция Дирихле $\chi(t)$ измеримой, интегрируемой по Лебегу на отрезке $[0,1]$. Найти $\int_0^1 \chi(t)dt$ в смысле Лебега.
			—

	2. Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов.	знать: методы функционального анализа и основные способы построения прикладных математических моделей; уметь: применять методы функционального анализа при решении финансово-экономических задач методом математического моделирования	Выяснить, является ли в пространстве l_2 выражение $S(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x_n y_n$ скалярным произведением. Дать классическое скалярное произведение в l_2 . Будет ли пространство l_2 полным относительно метрики, порожденной скалярным произведением $S(x, y)$? В пространстве $L^2[0,1]$ для множества $U = \{u \in \mathbb{H} : (\int_0^1 u(t) dt)^2 \leq 1\}$. доказать его выпуклость и замкнутость, дать правило вычисления метрической проекции на множество U .
--	--	---	---

Примеры практико-ориентированных (ситуационных) заданий

1. Обоснуйте, применимы ли в гильбертовом пространстве \mathbb{H} а) метрический, б) слабый, в) сильно выпуклый варианты теоремы Вейерштрасса для задачи минимизации линейной функции на шаре:

$$J(u) \rightarrow \inf_U, U = S_1(u_0), J(u) = \langle a, u \rangle_{\mathbb{H}}, u_0, a \in \mathbb{H} ?$$

2. Обоснуйте, применимы ли в гильбертовом пространстве \mathbb{H} а) метрический, б) слабый, в) сильно выпуклый варианты теоремы Вейерштрасса для задачи минимизации квадратичной функции на шаре:

$$J(u) \rightarrow \inf_U, U = S_1(u_0), J(u) = \langle a, u \rangle_{\mathbb{H}}^2, u_0, a \in \mathbb{H} ?$$

3. Обоснуйте, применимы ли в гильбертовом пространстве \mathbb{H} а) метрический, б) слабый, в) сильно выпуклый варианты теоремы Вейерштрасса для задачи минимизации квадратичной функции на гиперплоскости:

$$J(u) \rightarrow \inf_U, U = \{u \in \mathbb{H} : \langle u, b \rangle_{\mathbb{H}} = 1\}, J(u) = \|u - c\|_{\mathbb{H}}^2, b, c \in \mathbb{H} ?$$

4. Обоснуйте, применимы ли в гильбертовом пространстве \mathbb{H} а) метрический, б) слабый, в) сильно выпуклый варианты теоремы Вейерштрасса для задачи минимизации квадратичной функции на слое:

$$J(u) \rightarrow \inf_U, U = \{u \in \mathbb{H}: |\langle u, b \rangle_{\mathbb{H}}| \leq 1\}, J(u) = \|u - c\|_{\mathbb{H}}^2, b, c \in \mathbb{H} ?$$

5. Выписать критерий оптимальности и с его помощью решить задачу минимизации линейной функции на шаре:

$$J(u) \rightarrow \inf_U, U = S_1(u_0), J(u) = \langle a, u \rangle_{\mathbb{H}}, u_0, a \in \mathbb{H} ?$$

6. Выписать критерий оптимальности и с его помощью решить задачу минимизации квадратичной функции на шаре:

$$J(u) \rightarrow \inf_U, U = S_1(u_0), J(u) = \langle a, u \rangle_{\mathbb{H}}^2, u_0, a \in \mathbb{H} ?$$

7. Выписать критерий оптимальности и с его помощью решить задачу минимизации квадратичной функции на гиперплоскости:

$$J(u) \rightarrow \inf_U, U = \{u \in \mathbb{H}: \langle u, b \rangle_{\mathbb{H}} = 1\}, J(u) = \|u - c\|_{\mathbb{H}}^2, b, c \in \mathbb{H} ?$$

8. Выписать критерий оптимальности и с его помощью решить задачу минимизации квадратичной функции на слое:

$$J(u) \rightarrow \inf_U, U = \{u \in \mathbb{H}: |\langle u, b \rangle_{\mathbb{H}}| \leq 1\}, J(u) = \|u - c\|_{\mathbb{H}}^2, b, c \in \mathbb{H} ?$$

Примерные вопросы для подготовки к зачету

1. Что называется декартовым произведением бесконечной системы множеств?
2. Дайте определение возрастающей последовательности множеств.
3. Дайте определение убывающей последовательности множеств.
4. Дайте определение нижнего предела последовательности множеств.
5. Дайте определение верхнего предела последовательности множеств.
6. Что такое верхняя грань линейно упорядоченного множества?
7. Что такое максимальный элемент частично упорядоченного множества?

8. Сформулируйте лемму Цорна.
9. Сформулируйте теорему Кантора – Бернштейна о существовании биекции.
10. В каком случае говорят, что мощность одного множества не превосходит мощности другого множества?
11. В каком случае говорят, что множества имеют одинаковую мощность?
12. Дайте определение кольца множеств.
13. Дайте определение алгебры множеств.
14. Дайте определение сигма-кольца множеств.
15. Дайте определение сигма-алгебры множеств.
16. Дайте определение меры на кольце множеств.
17. Дайте определение счетно-аддитивной меры на сигма-кольце множеств.
18. В чем состоит свойство счетной полуаддитивности меры?
19. В чем состоит свойство монотонности меры?
20. Запишите формулу включения-исключения для двух множеств.
21. В чем состоит свойство непрерывности счетно-аддитивной меры?
22. В каком случае говорят, что одна счетно-аддитивная мера абсолютно непрерывна относительно другой счетно-аддитивной меры?
23. Какие множества на прямой \mathbb{R} называются простыми (по Жордану)?
24. Как определяется мера Жордана для простого множества на \mathbb{R} ?
25. Дайте определение внешней меры Жордана для ограниченного множества на \mathbb{R} .
26. Какие множества называются измеримыми по Жордану?
27. Как определяется мера Жордана для измеримого по Жордану множества?
28. Приведите пример ограниченного счетного множества, неизмеримого по

Жордану.

29. Какие множества на прямой \mathbb{R} называются элементарными (по Лебегу)?
30. Как определяется мера Лебега для элементарного множества на \mathbb{R} ?
31. Дайте определение внешней меры Лебега для множества на \mathbb{R} .
32. Какие множества называются измеримыми по Лебегу?
33. Как определяется мера Лебега для измеримого по Лебегу множества?
34. Приведите пример множества на прямой, имеющего меру Лебега 1 и не содержащего интервала.
35. Приведите пример ограниченного множества на прямой, измеримого по Лебегу, но не измеримого по Жордану.
36. Какая функция называется измеримой?
37. Что такое сходимость последовательности измеримых функций по мере?
38. Дайте определение и запишите общий вид простой функции.
39. Как определяется интеграл от простой функции?
40. Какое свойство интеграла называется линейностью?
41. Что такое аддитивность интеграла?
42. В чем состоит свойство счетной аддитивности интеграла?
43. Как определяется интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции по измеримому множеству?
44. В каком случае говорят, что числовая функция на некотором множестве равна нулю почти всюду?
45. Сформулируйте теорему Леви о монотонной сходимости.
46. В чем состоит свойство абсолютной непрерывности интеграла?
47. Сформулируйте теорему Радона – Никодима об общем виде абсолютно

непрерывной меры.

48. Как определяется интеграл Лебега от знакопеременной измеримой функции по измеримому множеству?

49. Сформулируйте теорему Лебега об ограниченной сходимости.

50. Сформулируйте критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

51. Что такое бесконечномерное линейное пространство?

52. Как определяется понятие линейной зависимости для произвольного множества векторов линейного пространства?

53. Что такое базис Гамеля линейного пространства?

54. Охарактеризуйте базис Гамеля линейного пространства, как минимальную систему векторов, обладающую некоторым свойством.

55. Что можно утверждать о двух различных базисах Гамеля одного линейного пространства?

56. Что такое фактор-пространство линейного пространства?

57. Сформулируйте неравенство Минковского для рядов.

58. Дайте определение линейного нормированного пространства бесконечно малых последовательностей.

59. Дайте определение линейного нормированного пространства сходящихся последовательностей.

60. Дайте определение линейного нормированного пространства ограниченных последовательностей.

61. Дайте определение Лебегова пространства последовательностей.

62. Сформулируйте неравенство Минковского для интегралов.

63. Дайте определение линейного нормированного пространства ограниченных

функций.

64. Дайте определение линейного нормированного пространства непрерывных функций.

65. Дайте определение линейного нормированного пространства функций, ограниченных в существенном.

66. Дайте определения пространств Лебега.

67. Дайте определение метрики.

68. Дайте определение нормы.

69. Дайте определение полунормы.

70. Что такое открытый шар в метрическом пространстве?

71. Что такое замкнутый шар в метрическом пространстве?

72. Дайте определение ограниченного множества в метрическом пространстве.

73. Что такое сходящаяся последовательность точек в метрическом пространстве?

74. В каком случае нормы называются эквивалентными?

75. Дайте определение внутренней точки множества.

76. Дайте определение предельной точки множества.

77. Дайте определение граничной точки множества.

78. Дайте определение изолированной точки множества.

79. Дайте определение открытого множества.

80. Дайте определение замкнутого множества.

81. Что такое замыкание множества?

82. Каков общий вид открытого множества на прямой \mathbb{R} ?

83. Что такое непрерывное отображение одного метрического пространства в другое?

84. Дайте определение фундаментальной последовательности точек.

85. Что такое полное метрическое пространство?

86. Что такое банахово пространство?

87. Сформулируйте теорему об убывающей последовательности замкнутых шаров.
88. Дайте определение сходящегося ряда в банаховом пространстве.
89. Сформулируйте признак абсолютной сходимости ряда в банаховом пространстве.
90. Дайте определение базиса Шаудера в банаховом пространстве.
91. Дайте определение компактного множества в метрическом пространстве.
92. Как можно однозначно охарактеризовать компактные множества в арифметическом пространстве?
93. Сформулируйте критерий Хаусдорфа компактности пространства.
94. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о числовой функции, непрерывной на компакте.
95. В каком случае говорят, что отображение удовлетворяет условию Липшица?
96. Что такое сжимающее отображение?
97. Что такое неподвижная точка отображения?
98. Сформулируйте теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения.
99. Что такое скалярное произведение в линейном пространстве?
100. Сформулируйте неравенство Коши – Буняковского для скалярного произведения.
101. Как определяется норма, порожденная скалярным произведением?
102. Какое свойство однозначно характеризует норму, порожденную некоторым скалярным произведением?
103. Что такое гильбертово пространство?
104. Как определяется скалярное произведение в пространстве квадратично–суммируемых последовательностей?
105. Как определяется скалярное произведение в пространстве квадратично–

интегрируемых функций?

106. Что такое ортогональное дополнение множества?

107. Сформулируйте теорему об ортогональной проекции.

108. Опишите процедуру Грамма – Шмидта ортогонализации системы векторов.

109. Сформулируйте неравенство Бесселя для ортонормированной системы векторов.

110. Дайте определение ортонормированного базиса.

111. Сформулируйте равенство Парсеваля для ортонормированного базиса.

112. Как можно однозначно охарактеризовать ортонормированную систему векторов, являющуюся ортонормированным базисом?

113. Приведите пример ортонормированного базиса в пространстве квадратично-интегрируемых функций.

114. Дайте определение линейного оператора.

115. Дайте определение линейного функционала.

116. Что такое ограниченный линейный оператор?

117. Что такое ограниченный линейный функционал?

118. Как определяется норма линейного оператора?

119. Как определяется норма линейного функционала?

120. Сформулируйте свойства нормы линейного ограниченного оператора.

121. Что такое нормированное пространство линейных непрерывных функционалов?

122. Сформулируйте теорему Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

1. Кутузов, А. С. Введение в функциональный анализ : учебное пособие / А. С. Кутузов. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 482 с. – ЭБС Университетская библиотека ONLINE. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571413> (дата обращения: 19.01.2023). – Текст : электронный.

Дополнительная литература:

2. Дерр, В. Я. Функциональный анализ (с упражнениями и решениями). : учебное пособие / В. Я. Дерр. — Москва : КноРус, 2023. — 510 с. — ЭБС BOOK.ru. — URL:<https://book.ru/book/947268> (дата обращения: 19.01.2023). — Текст : электронный.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Личный кабинет обучающегося <https://org.fa.ru>
2. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/>
3. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
4. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>
5. Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znaniy.com>
6. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
7. Электронно-библиотечная система издательства Проспект <http://ebs.prospekt.org/books>
8. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» <https://e.lanbook.com/>
9. Деловая онлайн-библиотека Alpina Digital <http://lib.alpinadigital.ru/>
10. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>
11. Национальная электронная библиотека <http://нэб.рф/>
12. СПАРК <https://spark-interfax.ru/>

13. Academic Reference <http://ar.cnki.net/ACADREF>
14. Электронная коллекция книг издательства Springer: Springer eBooks
<http://link.springer.com/>

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Цель методических рекомендаций – обеспечить студенту бакалавриата (далее – студенту) оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться с содержанием рабочей программы дисциплины (далее – РПД), с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, имеющимися на образовательном портале и сайте департамента, с графиком консультаций преподавателей.

Рекомендации по подготовке к лекционным занятиям

(теоретический курс)

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания департамента.

Студентам рекомендуется:

- перед каждой лекцией просматривать рабочую программу дисциплины, что позволит сэкономить время на записывание темы лекции, ее основных вопросов, рекомендуемой литературы;
- на отдельные лекции приносить соответствующий материал на бумажных или электронных носителях, представленный лектором на портале. Данный материал будет охарактеризован, прокомментирован, дополнен непосредственно на лекции;
- перед очередной лекцией необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущей лекции. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам, если разобраться в материале опять не

удалось, то обратитесь к лектору (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

Рекомендации по подготовке к практическим (семинарским) занятиям

Студентам следует:

- приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;
- до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующей темы занятия;
- при подготовке к практическим занятиям следует обязательно использовать не только лекции, но и другую учебную литературу;
- в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, при решении задач, заданных для самостоятельного решения;
- в ходе семинара давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;
- на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Методические рекомендации по выполнению различных форм самостоятельных домашних заданий

Самостоятельная работа студентов включает в себя выполнение различного рода заданий, которые ориентированы на более глубокое усвоение материала изучаемой дисциплины. К выполнению заданий для самостоятельной работы предъявляются следующие требования: задания должны выполняться самостоятельно и представляться в установленный срок, а также соответствовать установленным требованиям по оформлению.

Студентам следует:

- руководствоваться графиком самостоятельной работы, определенным РПД;
- выполнять все плановые задания, выдаваемые преподавателем для самостоятельного выполнения, и разбирать на семинарах и консультациях неясные вопросы;

- использовать при подготовке нормативные документы Финансового университета;

- при подготовке к зачету параллельно прорабатывать соответствующие теоретические и практические разделы дисциплины, фиксируя неясные моменты для их обсуждения на плановой консультации.

Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к семинарскому занятию, выполнение самостоятельной работы) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома.

К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература.

При работе с литературой рекомендуется делать записи. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки явного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

Методические указания по проведению практических занятий

По структуре практические занятия следует разделить на учебные и контрольные.

Учебные практические занятия структурно состоят из следующих компонент:

- проверка наличия выполненного задания самостоятельной работы каждого студента;
- выборочная проверка корректности выполнения домашнего задания;
- разбор типичных ошибок, возникших в самостоятельной работе;
- рассмотрение теоретических вопросов, связанных с текущим практическим занятием;
- разбор методов выполнения практических заданий и решения задач;
- корректировка заданий для самостоятельной работы студентов.

Контрольные практические занятия структурно состоят из следующих компонент:

- проведение аудиторных самостоятельных работ;

- подведение итогов и разбор типичных ошибок, возникших при выполнении самостоятельных работ.

Студенты должны обратить внимание на перечень основных контрольных мероприятий, которые проводятся в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Конкретные сроки проведения этих мероприятий своевременно доводятся до сведения студентов.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

11.1. Комплект лицензионного программного обеспечения:

1. Пакет офисных программ;
2. Антивирус Kaspersky;

11.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Информационно-правовая система «Гарант»;
2. Информационно-правовая система «Консультант Плюс»;
3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>;

4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>;

11.3. Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации – не предусмотрены.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для освоения дисциплины возможно использование вычислительных средств – компьютер, смартфон или планшет, в качестве дополнительных инструментов организации и осуществления образовательного процесса.